Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

Jueves 12 de mayo de 2022 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

2222 – 7123

5 páginas

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor, comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 28]

En esta pregunta se le pide que explore las propiedades de una familia de curvas del tipo $y^2 = x^3 + ax + b$ para diversos valores de a y b, donde $a, b \in \mathbb{N}$.

(a) En los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente las siguientes curvas para $-2 \le x \le 2$ y $-2 \le y \le 2$, indicando claramente todos los puntos de intersección con los ejes de coordenadas que haya.

(i) $y^2 = x^3$, $x \ge 0$ [2]

(ii) $y^2 = x^3 + 1$, $x \ge -1$ [2]

(b) (i) Escriba las coordenadas de los dos puntos de inflexión que tiene la curva $y^2 = x^3 + 1$. [1]

(ii) Considere cada una de las curvas del apartado (a) e identifique dos características importantes que diferencien una curva de la otra. [1]

Considere ahora curvas de la forma $y^2 = x^3 + b$, para $x \ge -\sqrt[3]{b}$, donde $b \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Variando el valor de b, sugiera dos características importantes que sean comunes a todas estas curvas. [2]

A continuación, considere la curva $y^2 = x^3 + x$, $x \ge 0$.

(d) (i) Muestre que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$, para $x > 0$. [3]

(ii) A partir de lo anterior, deduzca que la curva $y^2 = x^3 + x$ no tiene ni máximos ni mínimos locales. [1]

La curva $y^2 = x^3 + x$ tiene dos puntos de inflexión. Debido a la simetría de la curva, estos puntos tienen la misma coordenada x.

(e) Halle el valor de esta coordenada x; dé la respuesta en la forma $x = \sqrt{\dfrac{p\sqrt{3}+q}{r}}$, donde p, q, $r \in \mathbb{Z}$. [7]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Se dice que $\mathrm{P}(x, y)$ es un punto racional de una curva si x e y son números racionales.

La recta tangente a la curva $y^2 = x^3 + ax + b$ en un punto racional P corta a la curva en otro punto racional Q.

Sea C la curva $y^2 = x^3 + 2$, para $x \geq -\sqrt[3]{2}$. El punto racional $\mathrm{P}(-1, -1)$ pertenece a C.

(f) (i) Halle la ecuación de la recta tangente a C en P. [2]

(ii) A partir de lo anterior, halle las coordenadas del punto racional Q donde esta recta tangente corta a C; exprese cada coordenada como una fracción. [2]

(g) El punto $\mathrm{S}(-1, 1)$ también pertenece a C. La recta $[\mathrm{QS}]$ corta a C en otro punto más. Determine las coordenadas de este punto. [5]

2. [Puntuación máxima: 27]

En esta pregunta se le pide que investigue las condiciones para que una ecuación polinómica de grado 3 o 4 tenga raíces complejas.

La ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, donde p, q, $r \in \mathbb{R}$, tiene por raíces α, β y γ.

(a) Desarrollando $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, muestre que:

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$r = -\alpha\beta\gamma.$$ [3]

(b) (i) Muestre que $p^2 - 2q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. [3]

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2p^2 - 6q$. [3]

(c) Sabiendo que $p^2 < 3q$, deduzca que α, β y γ no pueden ser todas reales. [2]

Considere la ecuación $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, donde $q \in \mathbb{R}$.

(d) Utilizando el resultado del apartado (c), muestre que si $q = 17$, esta ecuación tiene al menos una raíz compleja. [2]

Noah cree que si $p^2 \geq 3q$, entonces α, β y γ son todas reales.

(e) (i) Variando el valor de q en la ecuación $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$ determine el menor valor entero positivo de q que permite mostrar que Noah está equivocado. [2]

(ii) Explique por qué la ecuación tiene al menos una raíz real para todo valor de q. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Considere ahora las ecuaciones polinómicas de grado 4.

La ecuación $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, donde p, q, r, $s \in \mathbb{R}$, tiene por raíces α, β, γ y δ.

De modo similar a como se hizo con la ecuación cúbica, se puede demostrar que:

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$r = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$$

$$s = \alpha\beta\gamma\delta.$$

(f) (i) Halle una expresión para $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ en función de p y q. [3]

(ii) A partir de lo anterior, indique una condición (en función de p y q) que implique que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ tiene al menos una raíz compleja. [1]

(g) Utilice el resultado que obtuvo en el subapartado (f)(ii) para mostrar que la ecuación $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ tiene al menos una raíz compleja. [1]

La ecuación $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$ tiene una raíz entera.

(h) (i) Indique qué nos dice el resultado del subapartado (f)(ii) al considerar esta ecuación $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$. [1]

(ii) Escriba la raíz entera de esta ecuación. [1]

(iii) Escribiendo $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12$ como el producto de un factor lineal y un factor cúbico, pruebe que la ecuación tiene al menos una raíz compleja. [4]

Referencias: